



TITLE:

境界面上の波源の問題に対する特異点の方法 (流体方程式の特異性)

AUTHOR(S):

桜井, 明

CITATION:

桜井, 明. 境界面上の波源の問題に対する特異点の方法 (流体方程式の特異性). 数理解析研究所講究録 1977, 293: 43-50

ISSUE DATE:

1977-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106192>

RIGHT:

境界面上の波源の問題に対する特異点の方法

東京電機大学 榎井 明

二つの一様な媒質をわける境界面上あるいはそのごく近く
に置かれた波源 (source) によってその両側の媒質にどの
ような衝撃波が生じ、それらがどのように伝播して行くかを
問題とする。この問題は単一媒質中におかれた波源の問題と
比較して以下のような著しい困難性がある。まず、単一媒質
の場合については波源の近くを除けば個々の波源の性質によ
らない相似性があるのに表面波源の場合にはそのような相似
性が成立しがたい。これに加えて、この個性の多少の違いが
結果で大きく違うことが多い。これは波源と境界面という二
種類の特異性が重っていることによると考えられる。また、
波源の個性が保たれる場所は波源の近くであり、当然に非線
型性が最も大きい。従って解析的な研究はきわめて難しい。

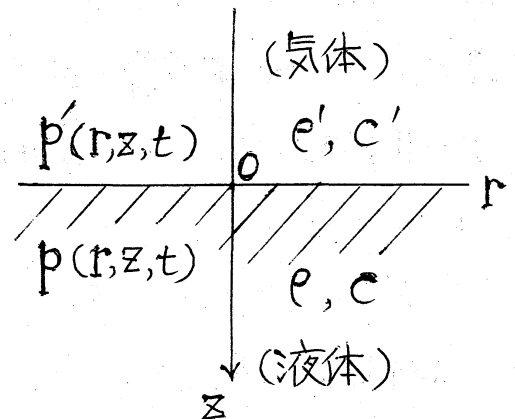
ここでは、このような困難性に対処する試みとして全体の
場を線型モデルであらわし、波源付近の非線型性を含めた波
源の個性をこの線型場の特異点の性質に代表させる方法を考

える。この場合、この線型モデルの適用範囲は当然、波源から充分はなれた場所に限られるわけであるが、実際問題として気体以外は波源の近くまでよい近似に近づいている。

ところで線型モデルであるからこれは表面の震源から音波が発生、伝播する問題であり教科書にでものっているような感じがするが著者の知る限りでは文献にあるのは単一媒質中で発生した波が境界面に達したときの問題や境界面波源でも一方の媒質が真空の場合で、これらは後述のように直接に本問題のモデルとはならない。

以下おもに液体が気体に接する場合について考え、さうに固体と気体の場合にも言及する。

図のように波源の位置を
原点 O , $z=0$ を境界面とする
円柱座標 (r, z) をとり、
気体側 ($z < 0$) の圧力、密度、
音速を p', ρ', c' 液体側 ($z > 0$)



のそれぞれを p, ρ, c とする。そこで p, ρ, c, c' はそれぞれ
右定数で $p(r, z, t)$, $p'(r, z, t)$ は r, z および
時間 t の未定関数である。

さて、線型モデルであるから p, p' はそれぞれ波動方程式

$$\ddot{p} = c^2 \Delta p, \quad \ddot{p}' = c^2 \Delta p' \quad (1)$$

を満足する。ここで $\Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である。

また境界面 $z=0$ では $r>0$ で圧力および速度の法線成分 u_z, u_z' の連続から

$$p - p' = 0, \quad u_z - u_z' = 0 \quad (2)$$

あるいは $u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad u_z' = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z}$ から

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

さうして原点 $z=r=0$ では適当な特異性をもつて

$p - p'$ と $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z}$ が無限大になければならない。

以上の条件を満足する p, p' を求めるために、さう波動方程式 (1) の解 p, p' をこれらの Laplace-Hankel 変換 $b(\omega, s), b'(\omega, s)$ を用いて次のようにあらわす。

$$p(r, z, t) = L^{-1} \left[\int_0^\infty b(\omega, s) e^{-az} J_0(\omega r) \omega d\omega \right] \quad z \geq 0$$

$$p'(r, z, t) = L^{-1} \left[\int_0^\infty b'(\omega, s) e^{a'z} J_0(\omega r) \omega d\omega \right] \quad z \leq 0$$

$$z \geq 0 \quad (4)$$

$$a = \sqrt{\omega^2 + \frac{s^2}{c^2}}, \quad a' = \sqrt{\omega^2 + \frac{s'^2}{c'^2}}$$

また L^{-1} は Laplace 変換

$$L(\cdot) \equiv \int_0^{\infty} (\cdot) e^{-st} dt$$

の逆変換をあらわす。

従って

$$(p - p')_{z=0} = L^{-1} \left[\int_0^{\infty} (b - b') J_0(\omega r) \omega d\omega \right]$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z} \right)_{z=0} = L^{-1} \left[\int_0^{\infty} \left(-\frac{a}{\rho} b - \frac{a'}{\rho'} b' \right) J_0(\omega r) \omega d\omega \right]$$

とすると

$$\int_0^{\infty} J_0(\omega r) \omega d\omega = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} r \omega r \int_0^{\infty} J_0(\omega r) \omega d\omega = 1 \quad (5)$$

あるいは記号的に

$$\int_0^{\infty} J_0(\omega r) \omega d\omega = \frac{\delta(r)}{r} \quad (6)$$

である。そこで本来は ω, s の関数である $b - b'$ および $-ab/\rho - a'b'/\rho'$ が ω に無関係で s だけの関数であるとし、任意の関数 $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$ を用いて

$$b - b' = \kappa_1(s), \quad -\frac{a}{\rho} b - \frac{a'}{\rho'} b' = \kappa_2(s) \quad (7)$$

とおくと

$$(p-p')_{z=0} = L^{-1}[\kappa_1(s)] \frac{\delta(r)}{r} \quad (8)$$

$$\left(-\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial z}\right)_{z=0} = L^{-1}[\kappa_2(s)] \frac{\delta(r)}{r} \quad (9)$$

となって $z=r=0$ での特異性を与えた。

ところで式 (5), (6) を用いて上式 (8), (9) は

$$\int_0^\infty (p-p')_{z=0} r dr = L^{-1}[\kappa_1(s)]$$

$$\int_0^\infty \left(-\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial z}\right)_{z=0} r dr = L^{-1}[\kappa_2(s)]$$

となり、従って

$$\kappa_1(s) = L\left[\int_0^\infty (p-p')_{z=0} \cdot r dr\right] = L[F(t)]$$

$$\kappa_2(s) = L\left[\int_0^\infty \left(-\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot r dr\right] = L[W(t)]$$

$$\text{そこで } F(t) \equiv \int_0^\infty (p-p')_{z=0} \cdot r dr \quad (10)$$

$$W(t) \equiv \int_0^\infty \left(-\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot r dr \quad (11)$$

である。関数 $F(t)$, $W(t)$ は発源での入力であらわすが、これらは、2のモデルでの波源の個性を代表しているわけである。

次に式(7)から $b(\omega, s)$, $b'(\omega, s)$ は

$$b(\omega, s) = \frac{\kappa_1 - \frac{\rho'}{\rho} \kappa_2}{1 + \frac{\rho'}{\rho} \frac{a}{a'}}, \quad b'(\omega, s) = -\frac{\frac{\rho'}{\rho} \frac{a}{a'} \kappa_1 + \frac{\rho'}{\rho} \kappa_2}{1 + \frac{\rho'}{\rho} \frac{a}{a'}} \quad (12)$$

となり、これを式(4)に代入すれば与えられた $F(t)$, $W(t)$ に対して解 p , p' が定まったことになる。

さて、2の解 p , p' の性質を見るためには気体と液体の場合 $\rho'/\rho \ll 1$ なることを考慮して式(12)を近似すると

$$b(\omega, s) = \kappa_1 - \frac{\rho'}{\rho} \kappa_2, \quad b'(\omega, s) = -\frac{\rho'}{\rho} \kappa_2$$

従って

$$p(r, z, t) = L^{-1} \left[\kappa_1(s) \cdot \int_0^\infty e^{-az} J_0(\omega r) \omega d\omega - \frac{\rho'}{\rho} \kappa_2(s) \int_0^\infty \frac{1}{a'} e^{-az} J_0(\omega r) \omega d\omega \right],$$

$$p'(r, z, t) = L^{-1} \left[-\frac{\rho'}{\rho} \kappa_2(s) \int_0^\infty \frac{1}{a'} e^{a'z} J_0(\omega r) \omega d\omega \right]$$

となる。

ところでベッセル関数やラプラス変換の公式を用いて

$$L^{-1} \left[\kappa_1(s) \int_0^\infty e^{-az} J_0(\omega r) \omega d\omega \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{F(t - \frac{r}{c})}{r} \cdot H(t - \frac{r}{c}), \quad (z \geq 0)$$

$$L^{-1} \left[\kappa_2(s) \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{a'z}}{a'} J_0(\omega r) \omega d\omega \right] \\ = -\frac{1}{g} W(t - \frac{g}{c'}) H(t - \frac{g}{c'}) \quad (z \leq 0)$$

但し $g = \sqrt{r^2 + z^2}$, $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

となるから

$$p(r, z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{F(t - \frac{g}{c})}{g} \cdot H(t - \frac{g}{c}) + p_a(r, z, t), \quad (13)$$

$$p'(r, z, t) = \frac{p' W(t - \frac{g}{c'})}{g} H(t - \frac{g}{c'}) \quad (14)$$

$$p_a \equiv L^{-1} \left[-p' \kappa_2(s) \int_0^{\infty} J_0(\omega r) \frac{e^{-a'z}}{a'} \omega d\omega \right] \quad (15)$$

となる。

これから、気中の波 p' は、この近似では波源からの球面波であり、一方、液中の波 p の第1項は双極子であるが、第2項は $p_a(r, 0, t) = p'(r, 0, t)$ であるから、これは気中の波によって2次的に液中に生じた、所謂 *airblast induced shock* をあらわすと解釈できる。以上から p' については液体部を剛体の如く假定したモデルが適当であるが p については双極子つまり気体部を真空としたモデルでは不十分なることがわかる。さらに入力関数 $F(t)$, $W(t)$ は任意であるが、これらは独立に与えらる式

(10), (11) によって関係づけられている。従って ρ, ρ' の各々には上のようなモデルを立てるにしても、それらを独立に与えることは出来ないわけである。このような特性がこの解では自然に与えられることが、この方法の利点といえる。

さて入力関数 $F(t), W(t)$ は現実の波源の特性に基づいて定められるが、この際、実際には $r \sim 0$ で $\rho > \rho', u_z < u'_z$ であることから、一様媒質中の波源の場合のよく知られた実験データを用いて決定できる。水平面上の火薬の爆発によって水中に起る衝撃波の場合について、このようにして定められた $F(t), W(t)$ を用いて計算された ρ の値は実測値とよく一致を示した。

次に、同じ方法で $Z < 0$ が気体、 $Z > 0$ が弾性体の場合を考える。この場合、弾性体内は二つの変位ポテンシャル $\varphi(r, z, t), \psi(r, z, t)$ で与えられ、これらは伝播速度がそれぞれ G, C_s なる波動方程式 $\ddot{\varphi} = G^2 \Delta \varphi, \ddot{\psi} = C_s^2 \Delta \psi$ を満足する。これらの解を式(4)と同(形)にあわせる。また境界面 $Z=0$ では Z 方向の速度 u_z, u'_z およびストレス $\sigma_{zz}, \sigma'_{zz}$ の連続から

$$L\{(\sigma_{zz} - \rho')_{z=0}\} = \frac{\delta(r)}{r} \chi_1(s), \quad L\{(u_z - u'_z)_{z=0}\} = \frac{\delta(r)}{r} \chi_2(s)$$

$$L\{(\sigma_{zr})_{z=0}\} = \frac{\delta(r)}{r} \chi_3(s)$$

とおくと原点で適当な特異性をもつた解が定まる。(終)